FLUSSI CON MOTI QUASI-UNIDIMENSIONALI

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico con Master in "Science in Aerospace Engineering" (Mississippi State University, USA)*

INTRODUZIONE

La Gasdinamica è quella branca della fluidodinamica che studia il comportamento dei fluidi compressibili, ossia quei fluidi in cui le variazioni di densità causate dal moto del fluido stesso non siano trascurabili. Ad essa si fa ricorso, ad esempio, per studiare il comportamento dei flussi in un ugello, la cui applicazione tipica si ha nei motori a reazione. Quando le variazioni di densità del fluido sono trascurabili si ricade nel caso più generico della aerodinamica. La gasdinamica può essere studiata in maniera classica, ossia risolvendo le equazioni differenziali che ne descrivono le leggi tramite integrazione diretta, o per via numerica, laddove la complessità delle equazioni e/o la loro non linearità sia tale da renderne di fatto impossibile la risoluzione analitica.

MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

Il moto di un fluido è in generale di tipo tridimensionale e non stazionario. E' tuttavia possibile affrontare lo studio dei fluidi reali con opportune ipotesi semplificative. Una di queste è la monodimensionalità di un flusso. Per definizione, un flusso è monodimensionale se le sue proprietà sono funzione di una sola variabile spaziale. Un flusso può anche essere quasi-unidimensionale. Si immagini, ad esempio, un flusso di un fluido contenuto in un condotto divergente, un condotto, cioè, la cui sezione aumenti movendosi da monte verso valle in relazione alla direzione del flusso stesso. La divergenza comporta una tridimensionalità del flusso. Se tale divergenza non è eccessiva, si può ritenere che il flusso, benché tri o bidimensionale, si comporti come un flusso monodimensionale o, per l'appunto, quasi-unidimensionale.
Un gas è caratterizzato da alcune proprietà: la densità r, espressa in kg/m^3, il calore specifico a pressione costante, c_p, espresso in kJ/kg K , il calore specifico a volume costante, c_v, avente le stesse dimensioni di c_p, il rapporto $\gamma = c_{p/}\, c_v$, che caratterizza le trasformazioni termodinamiche subite dal gas. Esistono anche altre grandezze di interesse termodinamico, ossia temperatura T e pressione p.
Un gas nella sua evoluzione può subire delle trasformazioni termodinamiche. Si ricordano le principali:

- *adiabatiche, ossia con scambi di calore trascurabili*
- *isoterme, cioè a temperatura costante*
- *isocore, ovvero a volume costante*
- *isobare, a pressione costante*

Le diverse trasformazioni termodinamiche sono descritte da appropriate equazioni. Le precedenti equazioni possono essere raggruppate ulteriormente in due classi: trasformazioni reversibili e trasformazioni irreversibili. Un gas può essere portato da uno stato ad un altro attraverso una qualunque trasformazione termodinamica. Lo stato di un gas è individuato dai parametri T, p, r. Una trasformazione reversibile può essere vista come una successione di trasformazioni quasi statiche da uno stato ad un altro immediatamente successivo. Va ricordato in proposito che non tutte le variabili termodinamiche sono differenziabili esattamente: il calore, ad esempio, si propaga solo da zone a temperatura alta verso altre a temperatura bassa e perciò non è differenziabile esattamente (da un punto di vista matematico, ma per gli ingegneri si!). Una trasformazione reversibile, inoltre, è un trasformazione in cui siano trascurabili (a rigore nulli) gli effetti dissipativi. É evidente che in presenza di fenomeni dissipativi la quantità di energia persa è funzione della trasformazione adottata per passare da uno stato ad un altro. Considerata una trasformazione termodinamica generica, si definisce entropia la quantità:

(1) $$s = \oint \frac{\delta q}{T}$$

Nella (1) s è l'entropia, il dq rappresenta il differenziale del calore. Non si è usato il dq proprio per ricordare che tale differenziale non è esatto. Una trasformazione reversibile è isentropica. Nell'analisi dei flussi quasi-unidimensionali ci si riferisce sempre a trasformazioni di tipo adiabatico. É da notare che l'entropia può variare puntualmente nello spazio e mantenersi costante nel tempo. Per flussi in cui l'entropia sia costante nello spazio si parla di omentropia. Un flusso le cui grandezze non siano funzione del tempo è detto stazionario.

Equazioni Isentropiche
Per flussi isentropici valgono le seguenti relazioni:

(2) $$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \frac{p}{p_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Nelle precedenti formule le grandezze con pedice "0" rappresentano le condizioni iniziali. Definito il numero di Mach:

(3) $$M=\frac{c}{a}$$

come rapporto fra la velocità del flusso e la velocità del suono nel mezzo considerato, è possibile riscrivere le (2) come:

(4) $$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

(5) $$\frac{p}{p_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Grandezze di Ristagno
Per un flusso stazionario adiabatico l'entalpia si conserva, ossia il flusso è omentalpico. In tal caso si ha:

(6) $$h+\frac{u^2}{2}=H=\text{cost}$$

Si supponga di arrestare il flusso, per esempio in corrispondenza di un punto di ristagno. In tal caso la (6) porta a scrivere:

(7) $$h_0=H$$

Tale valore determinato per l'entalpia viene detto entalpia di ristagno. Dalla (6), mediante opportuni passaggi matematici qua omessi, si ricava:

(8) $$T+\frac{u^2}{2c_p}=T_0$$

in cui T_0 prende il nome di temperatura di ristagno. Applicando la seconda delle (4) si ottiene anche la pressione di ristagno. Operando sulla (8) si può arrivare a scrivere:

(9) $$a^2+\frac{\gamma-1}{2}u^2=a_0^2$$

Nella precedente relazione, a rappresenta la velocità del suono nel fluido considerato, e di conseguenza la grandezza a_0 viene detta *velocità del suono di ristagno*. Tutte le grandezze di ristagno vengono dette anche grandezze totali o grandezze di arresto isentropico. La loro utilità sarà chiarita in seguito. Nel caso in cui il numero di Mach sia unitario, ci si trova in condizioni critiche, per cui si definiscono anche le corrispondenti grandezze critiche:

(10)
$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$
$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$
$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$
$$a^{*2} = \frac{2}{\gamma+1} a_0^2$$

La velocità critica del suono è una costante caratteristica del flusso. Essa può essere riscritta come:

(11)
$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 = \frac{\gamma+1}{2}a^{*2}$$

Definendo il numero di Mach critico come:

(12)
$$M^* = \frac{u}{a^*}$$

(si legge “Mach star”) vi vede come esso sia un numero proporzionale unicamente alla velocità del flusso, essendo la velocità critica del suono una costante. Dalla definizione di numero di Mach e dalla (11) si ottiene:

(13)
$$M^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1}M^{*2}}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^{*2}}$$

Nella (13) se M=0 allora M^*=0, se M=1 allora M^*=1, se M>1, M^*>1. Se M va all’infinito, in base alla (13) M^* diventa:

(14)
$$M^*_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Tale valore rappresenta il massimo raggiungibile. Per l’aria, essendo g=1.4, il valore di M^* limite è:

(15)
$$M^*_{li,aria} = \sqrt{6}$$

FLUSSI QUASI UNIDIMENSIONALI

Va premesso che si trattano nel presente articolo flussi stazionari ed omentropici. Si approccia lo studio degli ugelli. Gli ugelli sono condotti caratterizzati da un tratto convergente ed uno divergente. Il loro studio è importante per capire il comportamento dei fluidi in condizioni soniche. É inoltre la base per lo studio dei motori aeronautici e delle prese dinamiche. Si consideri un volume di controllo avente area A attraversata da un flusso a velocità u di fluido avente densità ρ. La portata massica è espressa da:

(16)
$$\dot{m} = \rho u A$$

Si consideri adesso un condotto a geometria variabile, ossia la cui sezione abbia area variabile. Le variazioni di area siano tali da ottenere un flusso quasi - unidimensionale. La costanza della portata massica porta a scrivere:

$$
\begin{aligned}
& d\dot{m} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow d(\rho u A) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow (d\rho)uA + \rho(du)A + \rho u(dA) = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Dividendo la terza delle (17) per ρuA si perviene a:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{18}$$

L’equazione di conservazione della quantità di moto in forma unidimensionale e stazionaria si pone nella forma:

$$u\frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0 \tag{19}$$

Da essa si ricava:

$$du = -\frac{1}{\rho u}dp \tag{20}$$

Tenendo presente la definizione di velocità del suono:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{21}$$

dalla (18), unitamente alla (20) e (21) si ricava:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho u^2}\left(1 - M^2\right) \tag{22}$$

Dalla (20) e dalla (22) si evince che se il flusso è subsonico, M<1, condizione necessaria affinché la velocità aumenti è che dp sia negativo (cfr Eq. (20)), ossia, in base alla (22) che l’area diminuisca lungo, dovendo essere dA negativo. Se M>1, allora per avere una accelerazione del flusso è necessario –in base a quanto precedentemente esposto- che dA>0.Se M=1 si è in condizioni critiche. É ovvio che la pressione all’interno dell’ugello varia con la velocità.

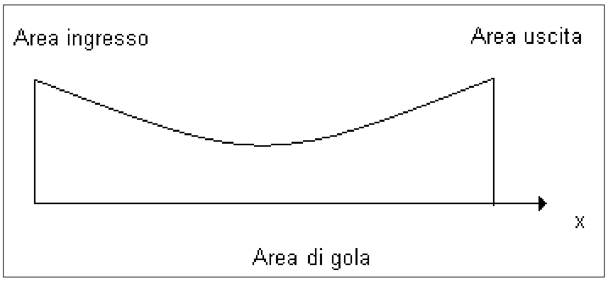

Figura 1

Dalle precedenti considerazioni si può costruire la curva di variazione delle aree per un ugello convergente - divergente. Si osservi che in corrispondenza della sezione di gola si ha la condizione di flusso sonico, mentre l’accelerazione supersonica del flusso è possibile soltanto nel divergente purché si verifichino delle condizioni che saranno esposte più avanti.

Si analizzi la Figura 1. Dall’equazione di conservazione della portata massica:

$$Q = \rho u A \tag{23}$$

e dalla equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{24}$$

mediante opportuni passaggi matematici qua omessi è possibile ricavare:

(25) $$\frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

La formula (25) descrive l'andamento della portata massica in funzione delle aree. Si osservi che la portata massima si ottiene in corrispondenza di M=1, e tale situazione è detta di strozzamento. La condizione di M=1 viene raggiunta in corrispondenza della sezione di gola, di conseguenza è proprio essa a causare lo strozzamento del flusso ed è essa a governare il funzionamento degli ugelli. L'ugello in figura (2) viene detto ugello De Laval, dal cognome dell'ingegnere svedese che per primo ne studiò il comportamento. Al variare della pressione in uscita dell'ugello, sono possibili i seguenti stati:

a) $p_{ext}<p_0$, il flusso è ovunque subsonico;
b) $p_{ext}<p_{cr}$, il flusso è ovunque subsonico tranne che nella sezione di gola, ove M=1;
c) $p_{cr}<p_{ext}<p_{ad}$, il flusso è subsonico nel convergente, supersonico a partire dalla sezione di gola. Si ha, però, ricompressione subsonica nel divergente a seguito di un urto sonico. L'urto è una brusca variazione di pressione in un intervallo spaziale strettissimo (lo spessore di un urto è dell'ordine di 10^{-7} metri). In questa condizione l'ugello è detto sovraespanso;
d) $p_{ext}=p_{ad}$, il flusso è supersonico in tutto il divergente dell'ugello e si ha la ricompressione del flusso all'esterno del medesimo. Questa è la condizione di progetto dell'ugello;
e) $p_{ext}<p_{ad}$, il flusso è detto sottoespanso e la espansione del flusso continua al di fuori dell'ugello.

Nel caso di motori a reazione, la portata massima che può essere smaltita è funzione della sezione di gola della dell'ugello cui può essere approssimato, in prima analisi, il motore stesso. La pressione esterna (quota di volo) determina la condizione di uscita del flusso, supersonica o subsonica. É evidente che il motore può essere ottimizzato per una sola quota di volo, a meno che non vengano adottati scarichi a geometria variabile. La portata massima, però, resta fissata dall'area della sezione ristretta. É possibile riscrivere –se ne omette la dimostrazione- la (25) in funzione del rapporto fra area A ad un generico punto e area di gola A_g:

(26) $$\frac{A}{A_g} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

la quale mostra che il numero di Mach in un determinato punto dell'ugello, una volta fissato il gas, è funzione solo di tale rapporto. Si riportano di seguito le curve caratteristiche dell'ugello rappresentanti la variazione di pressione e di Mach in funzione della ascissa. Ovviamente la sezione di gola è quella in cui si realizza la condizione sonica.

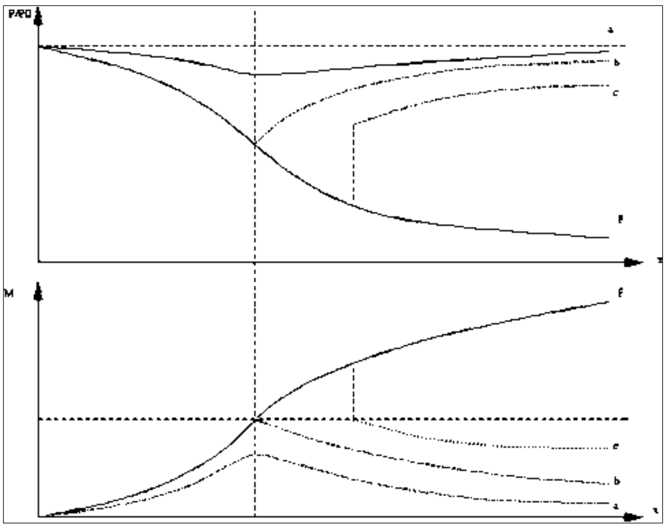

Figura 2

Nella Figura 2 il punto (a) corrisponde alla condizione subsonica di funzionamento dell'ugello. In (b) si ha la condizione sonica nella sezione di gola. Da (b) in poi si ha espansione supersonica del flusso nel divergente con formazione di urti di intensità via via crescente, finché in (f) si ottiene l'ugello adattato, ossia con formazione di urti esterna all'ugello stesso, e funzionamento totalmente supersonico. Il diagramma riportante l'andamento di p/p_0 evidenzia il salto di pressione che si ottiene nell'urto.
L'urto, in definitiva, è un salto di pressione che avviene in uno spazio infinitesimo: lo spessore di un urto è dell'ordine di 10^{-8} metri. Essendo il fenomeno dissipativo si ha aumento dell'entropia del flusso attraverso l'urto.

Se (1) e (2) sono due sezioni rispettivamente a monte e a valle (riferiti al verso della corrente) di un urto, si ha che:

(27) $$s(1) < s(2)$$

La (27) rappresenta la *relazione di Rankine – Hugoniot*, ed è comunemente usata nell'analisi degli urti. Si accenna al fatto che gli urti possono essere retti o obliqui, ma ciò esula dallo scopo del presente articolo.