

SOGLIA DEL REGIME DI MOTO INCOMPRESSIBILE

Valerio D'ALESSANDRO *

* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in "Energetica"; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

INTRODUZIONE

I fluidi presenti in natura sono tutti viscosi e comprimibili. Le equazioni che regolano le condizioni dinamiche dei fluidi viscosi e comprimibili risultano, purtroppo, di difficile applicazione e manipolazione al fine di risolvere problemi di interesse ingegneristico. Questo è dovuto al fatto che le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia sono molto complesse essendo non lineari, accoppiate e difficili da risolvere. Inoltre è difficile dimostrare l'esistenza di una soluzione unica per particolari condizioni al contorno.

Solo in particolari casi – flussi completamente sviluppati in geometrie semplici – è possibile ottenere una soluzione analitica delle *equazioni di Navier–Stokes*: l'analisi di questi flussi è importante per lo studio dei fondamenti della fluidodinamica ma poco utili dal punto di vista pratico.

In determinate condizioni di flusso, però, è possibile semplificare le equazioni poiché alcuni termini in esse presenti sono trascurabili rispetto ad altri e, nonostante questo, è possibile che perfino le equazioni così semplificate risultino ancora troppo complesse per ammettere soluzioni analitiche. Questa difficoltà comporta necessariamente l'approccio all'utilizzo dei metodi di soluzione di tipo numerico.

In questa breve trattazione si presenta un criterio che, per determinate condizioni di moto, consente di trascurare la comprimibilità del fluido.

EQUAZIONI DEL MOTO

Come è noto le equazioni che regolano lo stato dinamico di un fluido (in condizioni di viscosità indipendente dalla temperatura, con modello termodinamico di gas perfetto, modello reologico di fluido newtoniano non micropolare e tipicamente per acqua e aria) sono (si presuppone noto il significato dei simboli delle grandezze che vi compaiono):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\frac{1}{3} \mu + \lambda \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \nabla^2 T + \mu \Phi$$

$$p = \rho RT$$

Partendo dall'equazione della quantità di moto scritta in forma di Lagrange nell'ipotesi di fluido non viscoso:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$$

si ottiene la seguente espressione (considerando il moto stazionario, $St \gg 1$, e trascurando le forze di massa):

$$\nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{l} + [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}] \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l}$$

Se il moto è irrotazionale ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$) si ha:

$$\nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = 0$$

che è equivalente a:

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} = 0 \Rightarrow \int d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}$$

L'integrale in cui compare il termine barico può essere calcolato solo a partire da ipotesi ben precise sulla relazione fra pressione e densità. Nell'ipotesi di fluido incompressibile si ricava:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \text{const}$$

che è la nota espressione del Teorema di Bernoulli. Se, invece, si considera il fluido comprimibile allora la pressione e la densità del fluido sono legate dalla relazione:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$$

purchè il moto sia omoentropico (entropia della corrente imperturbata uniforme, assenza di scambi termici, dissipazioni viscosse e, ovviamente, di onde d'urto). Se la si differenzia si ottiene:

$$dp = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho \Rightarrow \frac{dp}{\rho} = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-2} d\rho = \text{const} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} d(\rho^{\gamma-1})$$

ovvero:

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \text{const} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} d(\rho^{\gamma-1}) = 0$$

Integrando questa relazione si ottiene:

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \text{const}$$

con "a" *velocità sonica locale*. Se la particolare particella fluida viene arrestata dalla sua condizione dinamica in modo isoentropico si può scrivere:

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

con a_0 *velocità del suono di ristagno*. Sfruttando la relazione di Laplace $a^2 = \gamma RT$ si può quindi scrivere (in seguito a qualche piccolo passaggio algebrico omissivo):

$$(1) \quad \frac{T^0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

essendo:

$$M = \frac{|\mathbf{u}|}{a}$$

il numero di Mach. Dalla (1), sfruttando la relazione

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{const}$$

si arriva all'importante relazione:

$$(2) \quad \frac{p^0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

La corrispondente relazione della (2) in regime incompressibile è:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = p^0$$

(ovviamente nell'ipotesi di flusso irrotazionale il teorema di Bernoulli vale in senso forte cioè fra una qualsiasi coppia di punti del campo di moto; invece, nell'ipotesi di fluido non viscoso in moto rotazionale, il teorema di Bernoulli vale in senso debole cioè fra una coppia di punti appartenenti ad una medesima linea di corrente).

COMPRESSIBILITÀ VS. INCOMPRESSIBILITÀ

L'idea è quella stimare l'errore che si commette nel calcolo della pressione del fluido considerando il fluido incompressibile piuttosto che comprimibile a partire dai binomi bernoulliani. L'andamento della pressione è stimato, lecitamente, in condizioni irrotazionali in quanto nei flussi in cui esiste lo strato limite (e lo strato limite non è separato) la distribuzione di pressione alla parete è determinata dal moto a potenziale esterno allo strato limite. Dalla (2) si deduce che:

$$p^0 - p = p \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

ovvero anche:

$$p^0 - p = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \frac{2p}{\rho |\mathbf{u}|^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

la quale porge:

$$(3) \quad p^0 - p = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \left\{ \frac{2}{\gamma M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \right\}$$

Il termine fra parentesi graffe della (3) stima quantitativamente l'errore che si commette nel considerare il fluido incompressibile piuttosto che comprimibile (in altre parole lo si potrebbe definire come lo scostamento dal "comportamento incompressibile" del fluido).

Se il fattore, dipendente dal numero di Mach, induce un errore inferiore al 5% allora l'approssimazione di fluido incompressibile è del tutto lecita. Il lavoro che bisogna fare, in definitiva, consiste nello stimare l'intervallo di numero di Mach che produce errori accettabili nel trascurare la comprimibilità del fluido.

Essendo $\gamma=1,4$ allora $(\gamma-1)/2 < 1$, e nell'ipotesi di $M < 1$ (moto subsonico) è possibile utilizzare il seguente sviluppo in serie binomiale:

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{n} \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^n$$

Trascurando i termini di ordine superiore al terzo ordine si può scrivere:

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 + \binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{1} \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right) + \binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{2} \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^2 + \binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{3} \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^3$$

Ricordando ora che sussiste la formula:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

si ha che:

$$\binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right) = \frac{\gamma}{2(\gamma-1)^2}$$

$$\binom{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{3} = \frac{1}{6} \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 2\right) = \frac{\gamma(2-\gamma)}{6(\gamma-1)^3}$$

Facendo le opportune sostituzioni si arriva a scrivere che:

$$\frac{2}{\gamma M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \cong \frac{2}{\gamma M^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{\gamma}{2(\gamma-1)^2} \frac{(\gamma-1)^2}{4} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{6(\gamma-1)^3} \frac{(\gamma-1)^3}{8} M^6 \right)$$

la quale può essere ridotta a:

$$\frac{2}{\gamma M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \cong \frac{2}{\gamma M^2} \left(\frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 \right)$$

Questa espressione consente di riscrivere la (3) nella forma:

$$p^0 - p \cong \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4 \right)$$

ovvero anche come:

$$\frac{(p^0 - p)_{\text{compr}} - (p^0 - p)_{\text{incompr}}}{\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2} \cong \left(\frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4 \right)$$

In definitiva, si può affermare che se vale la disuguaglianza:

$$(4) \quad \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24}M^4 < \frac{5}{100}$$

si può ritenere valida l'approssimazione di fluido incompressibile. Dalla (4) è possibile individuare il range utile di numeri di Mach per il quale è consentito trascurare la comprimibilità del fluido in esame. Riordinando la (4) nella forma:

$$\frac{5}{6}(2-\gamma)M^4 + 5M^2 - 1 < 0$$

si vede che la quantità a sinistra della disuguaglianza è un trinomio di secondo grado in M^2 che ha per radici:

$$(5) \quad M^2 = 3 \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{15}(2-\gamma)} \right)$$

Per $\gamma=1,4$ la (5) porge $M^2 < 0,117$, ovvero $M < 0,342$. Questo risultato sta a significare che per numeri di Mach inferiori a 0,342 l'errore che si commette nel trascurare la comprimibilità del fluido è inferiore al 5% (che dal punto di vista ingegneristico è del tutto accettabile). È sulla base di questo risultato che convenzionalmente la soglia che determina il regime di moto incompressibile è delimitata da numeri di Mach inferiori a 0,3.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.H. Ferziger, M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd, rev. ed. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2002

[2] E. Mattioli. *Aerodinamica*. Levrotto & Bella, Torino, 1992