FLUIDODINAMICA: TEORIA DEI FLUSSI POTENZIALI

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INTRODUZIONE

Nell'ambito della fluidodinamica classica lo studio dei flussi potenziali riveste una importanza notevole in quanto –per ragioni di semplicità- furono i primi ad essere studiati ed affrontati matematicamente. Si tenga presente che *tutti* gli aerei progettati fino agli Anni Settanta circa sono stati studiati (da un punto di vista aerodinamico) con tali metodi, in versione 'carta e penna ' prima, computerizzata poi.
I flussi potenziali trattano sia i flussi incomprimibili che quelli comprimibili. Per ragioni di semplicità e linearità nello sviluppo della teoria, si ritiene opportuno partire dalla trattazione dei flussi incomprimibili. Si rammenta che un fluido è incomprimibile quando la sua densità ρ è costante. Ciò è vero per i liquidi quasi sempre (non lo è più nel caso di pressioni elevatissime, dell'ordine delle centinaia di migliaia di N/m^2 , ma tale situazione esula le normali applicazioni), mentre per i gas la cosa può essere vera o no a seconda della velocità del flusso in esame.
Definita con a la velocità di propagazione delle perturbazioni nel mezzo in esame, si può dimostrare che essa ha espressione:

(1) $$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

La precedente quantità viene chiamata *velocità del suono*. Considerata la velocità c di un flusso, viene definito *il numero di Mach* come:

(2) $$M = \frac{c}{a}$$

Se M<1 si ha il *flusso è subsonico*, se M>1 il *flusso supersonico*, mentre per M=1 si ottiene il *flusso transonico*. Nel caso in cui il flusso sia subsonico, quando M<0.3 il fluido può ritenersi incomprimibile. Tale definizione è da prendersi con cautela perché considerato, ad esempio, un corpo che si muova a M=0.2, la geometria del corpo potrebbe essere tale da generare localmente flussi con M>0.3, per cui in tali punti il flusso non sarebbe da considerarsi incomprimibile. Stabilito questo è possibile passare all'inquadramento matematico dei flussi potenziali incomprimibili.

Circuitazione di un vettore

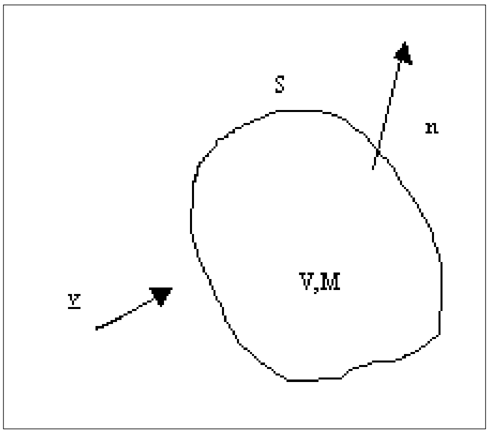

Figura 1

Assegnato un vettore **v** e data una linea chiusa l su cui sia definito un verso positivo di percorrenza (Figura 1), è definita *circuitazione* del vettore **v** la quantità:

(3) $$\Gamma = -\oint_{\ell} \bar{v} \cdot d\bar{s}$$

(nelle formule che seguono i vettori sono indicati con lettere con un trattino superiore). Il segno negativo deriva dal fatto che la circolazione è supposta positiva in senso orario, ma il verso positivo delle rotazioni è quello antiorario per definizione. In un riferimento cartesiano, si considerino il vettore **v**(u,v,w) e il vettore **ds**(dx,dy,dz).

La circuitazione G avrà espressione:

(4) $$\Gamma = -\oint_{\ell} \left(udx + vdy + wdz\right)$$

Divergenza
Data una grandezza vettoriale **A(**A_x,A_y,A_z**)**, si definisce *divergenza* lo scalare:

(5) $$\mathrm{div}(\bar{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Gradiente
Data una funzione scalare F, si definisce *gradiente* il vettore:

(6) $$\mathrm{grad}(F) = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$$

Rotazionale di un vettore
In un riferimento cartesiano, si definisce *rotazionale* del vettore **v**(u,v,w) il vettore:

(7) $$\mathrm{rot}\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

In notazione vettoriale la (7) si scrive come:

(8) $$\mathrm{rot}\bar{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\bar{k}$$

Laplaciano
Si definisce *Laplaciano* della funzione scalare F la quantità scalare:

(9) $$\nabla^2 F = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

EQUAZIONI DELLA FLUIDODINAMICA

Equazione di Continuità
Sia ρ la densità del fluido, espressa in kg/m^3 . Si consideri un volume di fluido V delimitato dalla superficie S, e sia definita la normale **n** alla superficie in ogni suo punto.

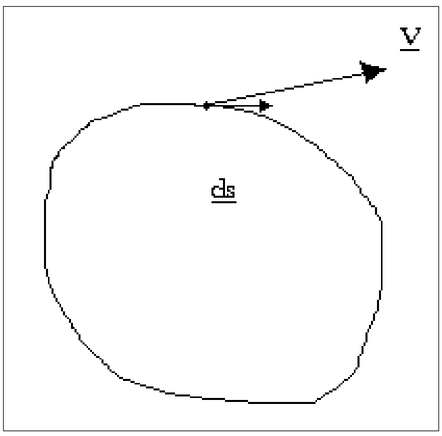

Figura 2

Considerati il vettore velocità **v** ed **n**, il rateo di variazione della massa M di fluido contenuto nel volume V è definibile mediante la relazione integrale:

(10) $$\frac{d}{dt}\oiiint_V \rho\, dV = -\oiint_S \rho\bar{v}\cdot\bar{n}\, dS$$

Essa esprime il bilancio fra flusso che attraversa la superficie e variazione temporale di massa nel volume da essa contenuto. Applicando alla (10) il teorema della divergenza, essa può essere riscritta nella forma:

(11) $$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\bar{v})\right) dV = 0$$

Dato che il volume adottato è generico, la funzione integranda è identicamente nulla in qualunque punto dello spazio in esame. Allora è possibile scrivere:

(12) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \bar{v}\right) = 0$$

La (12) è nota come *Equazione di Continuità*. La ipotesi fatta a priori di incomprimibilità del flusso porta all'annullamento della prima derivata, cioè la (12) assume forma:

(13) $$\mathrm{div}\left(\rho \bar{v}\right) = 0$$

ossia:

(14) $$\mathrm{div}\,\bar{v} = 0$$

La relazione (14) equivale ad affermare che per fluidi incomprimibili il vettore velocità **v** definisce un *campo solenoidale*. In un riferimento Cartesiano la (14) assume espressione:

(15) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Teorema di Stokes
Il teorema di Stokes fornisce un legame fra un integrale areale ed uno di linea.

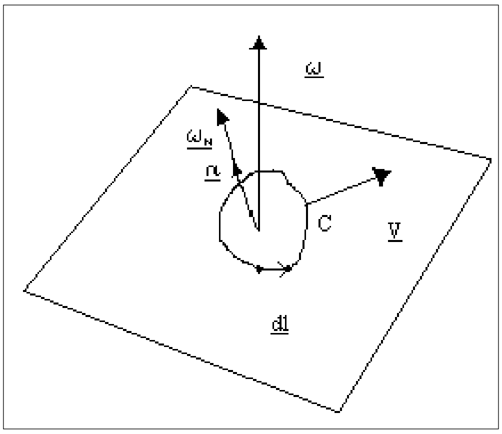

Figura 3

Considerato il vettore velocità **v**, è possibile dimostrare che la vorticità normale rispetto ad una superficie comunque orientata ha espressione:

(16) $$\overline{\omega_n} = \mathrm{rot}\,\bar{v} \cdot \bar{n} = \mathrm{rot}_n\,\bar{v}$$

dove l'indice n indica che la direzione è, per l'appunto, quella normale alla superficie presa in considerazione (Figura 3), e rot indica il rotazionale del vettore definito dalla (8).
Il teorema di Stokes (di cui si omette la dimostrazione) afferma che:

(17) $$\iint_S \omega_n dS = \oint_\ell \bar{v} \cdot d\bar{s} = -\Gamma$$

FLUSSI POTENZIALI INCOMPRIMIBILI

Dalla relazione di Stokes è evidente che l'integrale di linea di **v·ds** su di una linea chiusa è non nullo in un campo rotazionale. In un riferimento Cartesiano, **v**·**ds** ha espressione:

(18) $$\bar{v} \cdot \overline{ds} = u dx + v dy + w dz$$

Ora, se il campo di moto è *irrotazionale*, per definizione si avrà:

(19) $$\overline{\omega_n} = \mathrm{rot}_n \bar{v} = \bar{0}$$

In conseguenza di ciò l'integrale a secondo membro nella (17) sarà identicamente nullo. In particolare l'integrale risulta essere nullo per qualunque cammino chiuso solo se la funzione integranda è un differenziale esatto. Ciò implica che la funzione **v**·**ds** all'interno della (17) debba essere differenziale esatto. Sia anche $\Phi(x,y,z)$ una funzione il cui differenziale è esatto. Sviluppando il differenziale di Φ si ottiene:

(20) $$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

Dalla (18) e dalla (20), imponendo che Φ sia un differenziale esatto, si ottiene:

(21) $$udx + vdy + wdz = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

relazione valida se e soltanto se:

(22) $$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Si noti che la definizione data di irrotazionalità dalla (19) è soddisfatta. Considerate, ad esempio, le derivate di v e w si ottiene:

(23) $$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Dal teorema di Schwartz, risulta però:

(24) $$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ossia:

(25) $$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Questo equivale ad affermare che il termine:

(26) $$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{i}$$

che compare nella definizione di rotazionale data dalla (8) è nullo. Analogamente si procede per le altre due componenti, per cui la condizione di irrotazionalità del flusso è provata. Ricordando la definizione di gradiente di uno scalare, è possibile esprimere, per la (22), **v** come:

(27) $$\bar{v} = \nabla \Phi$$

ovvero, in componenti:

(28) $$(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

La (27) afferma che il campo di velocità **v** può essere ottenuto come gradiente di un campo scalare Φ. Per definizione **v** definisce allora un *campo vettoriale conservativo*, mentre Φ è detto *potenziale scalare*. Dalla definizione di Laplaciano (9) è possibile scrivere l'equazione di continuità (14) nella forma:

(29) $$\nabla^2 \Phi = 0$$

La (29) è la forma classica dell'*equazione di Laplace*, utilizzata per descrivere un'ampia categoria di fenomeni fisici oltre al moto irrotazionale dei fluidi non viscosi. Essa è una equazione differenziale alle derivate parziali di tipo ellittico. In effetti la (29) non ammette forma chiusa se non si forniscono adeguate condizioni al contorno (c.a.c.). Per i problemi in esame si possono fornire due tipi di condizioni:

1 - condizioni di Newman, qualora si assegni il valore del gradiente della funzione sul 'bordo',
2 - condizioni di Dirichlet, qualora si assegni il valore della funzione sul 'bordo'.
3 - condizioni di Robin, di tipo misto.

Si noti che il bordo non necessariamente coincide con il contorno fisico di un oggetto immerso del fluido: può anche essere inteso come bordo della regione di spazio oggetto dell'analisi.
Normalmente i problemi sono di tipo misto: si assegnano, cioè, i due tipi di condizioni al contorno. La (29) con le opportune c.a.c. consente di ottenere una risoluzione approssimata del campo di moto di un fluido, la cui approssimazione maggiore o minore è funzione della trascurabilità degli effetti legati alla viscosità e della comprimibilità. Le condizioni al contorno usualmente poste sono il valore della velocità asintotica (a grande distanza dal corpo in esame) e la condizione di tangenza del fluido sul corpo stesso. In realtà quest'ultima condizione è una approssimazione perché la velocità tangenziale, nei flussi 'reali', si annulla sulla superficie del corpo. Tuttavia da un punto di vista di calcolo è enormemente più semplice risolvere i moti potenziali che le *equazioni di Navier-Stokes* o di Eulero. Si ricordi la proprietà più interessante della (29): essa è una funzione armonica, e come tale gode del principio di sovrapposizione degli effetti. In ragione di ciò è possibile letteralmente 'costruire' funzioni le cui soluzioni descrivano geometrie complesse.
Classicamente si usano pozzi, sorgenti, dipoli, doppiette, vortici lineari e non, ecc. Dalla sovrapposizione di questi si possono generare, come anzidetto, geometrie relativamente complesse e studiarne, quindi, gli aspetti fluidodinamici. Si danno di seguito brevi cenni flussi potenziali più comuni.

Flusso uniforme

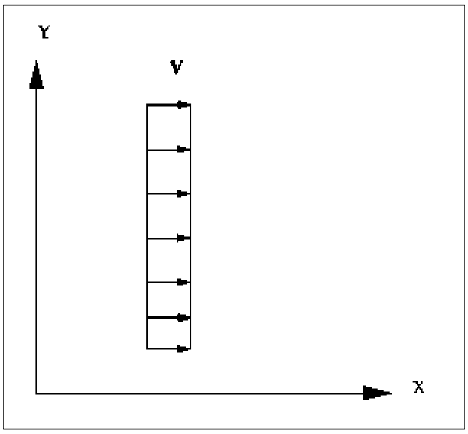

Figura 4

Il flusso uniforme è rappresentabile come un flusso la cui velocità è costante nel tempo.
In due dimensioni, per fissare le idee, lo si può immaginare come una distribuzione di velocità costante, per direzione, verso e modulo, in un piano (Figura 4). Tale flusso, lungo l'asse x di un riferimento cartesiano, ha potenziale:

(30) $$\Phi = V_\infty x$$

dove x è l'ascissa, mentre V_∞ è definita *velocità asintotica*, ossia è la velocità del fluido indisturbato a grande distanza dal corpo in esame. Ovviamente l'equazione (30) si ripete in maniera analoga lungo gli assi y e z. Il potenziale di un flusso bidimensionale o tridimensionale sarà dato dalla somma delle anzidette funzioni elementari.

Sorgente

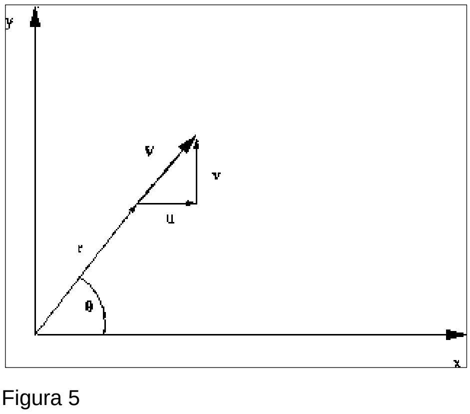

Figura 5

La sorgente è un punto nel piano (o nello spazio) da cui viene generato un flusso uscente di fluido (Figura 5). Se il flusso fosse entrante, si parlerebbe di pozzo. Fra sorgente e pozzo, da un punto di vista matematico, cambia solo il segno del flusso: positivo per la sorgente, negativo per il pozzo.
Il campo delle velocità è radiale uscente (*sorgente*) o entrante (*pozzo*) da un punto. Il potenziale ha espressione:

(31) $$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

ove Q rappresenta la *portata* in kg/m^2 o kg/m^3, in funzione della dimensionalità del flusso La velocità derivante dalla (31) ha espressione:

(32) $$v = \frac{Q}{2\pi r}$$

Vortice

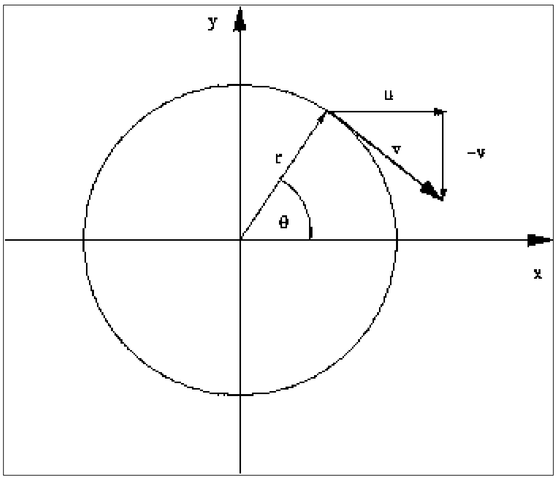

Figura 6

Le linee di corrente del vortice sono dei cerchi centrati nell'origine. Il modulo della velocità è funzione della distanza dal centro (Figura 6).
Poiché risulta che per le linee di corrente $u/v = -x/y$, definita con Γ la circolazione del vortice si ha che:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{33}$$

mentre il potenziale ha espressione:

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{34}$$

La circolazione è definita positiva se il vortice è orario.

Esistono altri tipi di flussi potenziali qui non descritti. Per esempio l'accoppiamento pozzo – sorgente, che origina il dipolo e la doppietta. Maggiori informazioni in merito possono essere trovati sui testi di fluidodinamica classica. La sovrapposizione dei moti semplici genera moti che approssimano il comportamento di oggetti reali. Ad esempio: doppietta e moto uniforme creano i famosi *Ovali di Rankine*, che approssimano geometrie per l'appunto ovali, cioè corpi assialsimmetrici.

FLUSSI POTENZIALI COMPRIMIBILI

Non appena il numero di Mach raggiunge il valore di circa 0.3, la comprimibilità di un gas inizia ad non essere più trascurabile. Ciò comporta la formazione di onde causate proprio dalle variazioni di densità che si innescano una volta superato tale limite. Supponendo che il flusso subisca perturbazioni trascurabili è possibile sviluppare la teoria dei flussi comprimibili. Tale teoria fu sviluppata durante la prima metà del Novecento da Prandtl e Glauert, e fu largamente impiegata per lo sviluppo dei primi aerei trans- e super-sonici, quali , per esempio, il celeberrimo Bell X-1 'Glamorous Glennis ' con cui il 14 Ottobre 1947 Chuck Yeager superò la barriera del suono.
Si consideri un corpo muoventesi a velocità $-V_\infty$ in un fluido. Un osservatore solidale con il corpo vedrà un flusso uniforme muoventesi a V_∞ cui verranno sommate le perturbazioni u', v', w' causate dalla presenza del corpo nella corrente.
Viene definito *punto di ristagno* il punto in cui la corrente impatta il corpo. In tale punto si ha l'arresto del flusso (assenza di penetrazione della materia) e la conseguente conversione di energia cinetica in pressione.
Si suppone che le perturbazioni di velocità siano piccole confrontate al valore della velocità asintotica tranne che nel punto di ristagno.
Fissato un riferimento Cartesiano tridimensionale, sia la velocità asintotica parallela all'asse x. La velocità su di un generico punto della superficie del corpo sarà definita dalle tre componenti:

$$\begin{aligned} v_\infty + u' &= V_\infty + \Phi_x \\ v' &= \Phi_y \\ w' &= \Phi_z \end{aligned} \tag{35}$$

Le equazioni di Eulero traducono in fluidodinamica la legge di Newton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\bar{v}u + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\bar{v}v + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\bar{v}w + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

ove il vettore **v** ha componenti u,v,w e p è la pressione. Per semplicità si considera ora il caso bidimensionale. Dall'equazione di continuità per i flussi stazionari si ha:

(37) $$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

Le (36), sotto la ipotesi di flusso stazionario, assumono forma:

(38) $$\begin{aligned} &\mathrm{div}\rho\bar{v}u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ &\mathrm{div}\rho\bar{v}v + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ &\mathrm{div}\rho\bar{v}w + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Adottando la definizione data in (1) di velocità del suono, si ha:

(39) $$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

per cui le (36) , adeguatamente manipolate, assumono espressione:

(40) $$\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} \end{aligned}$$

Espandendo l’equazione (37) si ottiene:

(41) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$$

Moltiplicando per u la prima delle (40) e per v la seconda, addizionando le equazioni così ottenute e sostituendovi la (41) si ottiene:

(42) $$\left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ricordando adesso la definizione di irrotazionalità di un flusso data dalla (19) e quella di potenziale di velocità, la (42) diventa:

(43) $$\left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{2uv}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Nella (43), se a tende all’infinito (fluido incomprimibile) si ottiene l’equazione di Laplace per i flussi potenziali incomprimibili non viscosi bidimensionali. Ovviamente la (43) può essere estesa al caso tridimensionale. Tale equazione è la base per lo studio dei flussi supersonici. Sostituendo nella (43) le relazioni (35) si ottiene:

(44) $$\left(\frac{v_\infty^2 + 2u'V_\infty + u'^2}{a^2} - 1\right)\Phi_{xx} + 2\left(\frac{v_\infty v' + u'v'}{a^2}\right)\Phi_{xy} + \left(\frac{v'^2}{a^2} - 1\right)\Phi_{yy} = 0$$

La velocità asintotica è costante, per cui le sue derivate sono nulle: in conseguenza di ciò F può essere visto come il potenziale del flusso perturbato o come il potenziale totale. Definito con:

(45) $$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

il rapporto fra calore specifico a pressione costante e a volume costante di un gas, dalla termodinamica si ha che:

(46) $$\left(\frac{a}{a_\infty}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(2\frac{u'}{V_\infty} + \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \frac{v'^2}{V_\infty^2}\right) \cong 1 - (\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{u'}{V_\infty}$$

Nella (46) si è posto $M_\infty = V_\infty / a_\infty$. Trascurando gli ordini superiori e moltiplicando per 2 i termini che compaiono nella (44), considerata la (43) si ottiene:

(47) $$\left[\left(M_\infty^2 - 1\right) + (\gamma + 1) M_\infty^2 \frac{\Phi_x}{V_\infty}\right]\Phi_{xx} + \left(2M_\infty^2 \frac{\Phi_y}{V_\infty}\right)\Phi_{xy} - \Phi_{yy} = 0$$

Nella (47) i pedici x, y, xy, xx, yy…rappresentano le derivate parziali di una funzione rispetto alle medesime variabili. Per corpi affusolati, o comunque snelli, il termine centrale della (47) può essere convenientemente trascurato consentendo di ridurre l'equazione a:

(48) $$\left[\left(M_\infty^2 - 1\right) + (\gamma + 1) M_\infty^2 \frac{\Phi_x}{V_\infty}\right]\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0$$

La (48) è l'*equazione dei flussi transonici*, ed è evidentemente non lineare. Quando il numero di Mach è sufficientemente alto, il primo termine che compare all'interno delle parentesi quadre nella (48) predomina sul secondo, pertanto la (48) si riduce all'*equazione dei flussi supersonici*:

(49) $$(1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$$

In tre dimensioni la (49) assume la forma:

(50) $$(1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

La (50) è la famosa *equazione di Prandtl-Glauert*, di cui la (49) rappresenta la forma bidimensionale.

CONCLUSIONI

Ricapitolando i risultati ottenuti, per un flusso bidimensionale sono valide le seguenti equazioni:

- *Flussi subsonici* (equazione (29)):

(29) $$\nabla^2 \Phi = 0$$

- *Flussi transonici* (equazione (48)):

(48) $$\left[\left(M_\infty^2 - 1\right) + (\gamma + 1) M_\infty^2 \frac{\Phi_x}{V_\infty}\right]\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0$$

- *Flussi supersonici* (equazione (49)):

(49) $$(1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$$

Si osservi la stretta somiglianza fra l'equazione che regge i flussi subsonici con quella che regge i flussi supersonici. Il vantaggio di cui godono i flussi potenziali è che risulta valido, nel caso dei flussi supersonici e subsonici, il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui anche nel caso di flussi supersonici possono usarsi funzioni potenziali elementari quali sorgenti, doppiette, vortici, ecc. per descrivere superfici 'complesse'. In ogni caso, con corpi a forma tozza e/o per alti numeri di Mach l'equazione di Prandtl-Glauert non può essere impiegata e bisogna necessariamente far ricorso alla (48). Le equazioni (29), (48) e (49) possono essere facilmente estese al caso tridimensionale.