MOTO DEI FLUIDI REALI: LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Marco CAPOZZI *

** Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INTRODUZIONE

Le equazioni di Navier-Stokes sono le equazioni che descrivono il moto di un fluido reale. Esse contemplano il contributo di tutte le forze agenti su di un elemento infinitesimo di volume e sulla sua superficie. É conveniente, per descriverne la natura matematica, procedere alla loro 'costruzione' passo dopo passo.

Tipi di forze
Considerata una certa massa di fluido contenuta in una regione di spazio, su di essa agiscono due tipi di forze:

- *forze di volume;*
- *forze superficiali.*

Le forze di volume sono grandezze di tipo estensivo provocate da cause esterne alla regione considerata. Tali cause sono:

- *gravità;*
- *azioni dovute a campi elettrici e/o magnetici;*
- *forze non inerziali.*

Dato che tali forze sono proporzionali al volume, sono espresse per unità di volume. Le forze di superficie sono forze di natura intensiva e sono riconducibili ad una interazione del fluido in esame con il resto del sistema fisico considerato estrinsecata attraverso le superfici di contorno.

Accelerazione Lagrangiana
Considerata una certa proprietà P di un fluido, indicando con **u** il vettore velocità si definisce *accelerazione Lagrangiana o sostanziale* la quantità:

(1) $$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathrm{grad})P$$

EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE

Conservazione del Momento
La legge di conservazione del momento afferma che la variazione di momento di una certa regione di spazio avente volume V(t) è uguale alla risultante delle forze agenti su di essa. Tale legge è, in effetti, la seconda legge della dinamica. Si ricorda che, secondo la legge di Newton, in un sistema di riferimento inerziale risulta:

(2) $$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

ovvero:

(3) $$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Si consideri una particella di fluido avente velocità **u** la cui posizione sia individuata al generico istante di tempo t dal vettore posizione **r**. Denotati con **f** la grandezza estensiva per unità di volume, con V(t) il volume associato a tale massa di fluido e con S(t) la superficie che racchiude il medesimo, la conservazione del momento è espressa dalla relazione:

(4) $$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\mathbf{u}\,dv = \int_{V(t)} \rho\mathbf{f}\,dv + \int_{S(t)} \boldsymbol{\tau}\,dS$$

Nella precedente equazione la quantità τ rappresenta la tensione agente sulla superficie del volumetto di fluido. In seguito sarà fornita una definizione più precisa di tensione. Considerata una grandezza estensiva P scalare, vettoriale o tensoriale, la sua variazione nel tempo è esprimibile nella forma:

(5) $$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \boldsymbol{\rho} P dv = \int_{V(t)} \boldsymbol{\rho} \frac{dP}{dt} dv$$

ovvero:

(6) $$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho P dv = \int_{V(t)} \rho \frac{dP}{dt} dv$$

Sostituendo **u** a P nella (6) e considerata la (4) si ottiene:

(7) $$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho\, \mathbf{f}\, dV + \int_{S(t)} \boldsymbol{\tau}\, dS$$

Conservazione del momento angolare della quantità di moto
La legge di conservazione del momento angolare della quantità di moto afferma che la variazione del momento angolare della quantità di moto in un volume V eguaglia il momento totale ad esso applicato. In un sistema di riferimento inerziale, il momento angolare della quantità di moto di un vettore **u**, denotato con **L**, si esprime come:

(8) $$\mathbf{L} = \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{u})$$

Analogamente a quanto fatto prima per la quantità di moto, il momento angolare della quantità di moto riferito ad un volume ha forma:

(9) $$\int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}) dV = \int_{V(t)} \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) dV + \int_{S(t)} \rho \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}) dS$$

TENSORE DEGLI SFORZI

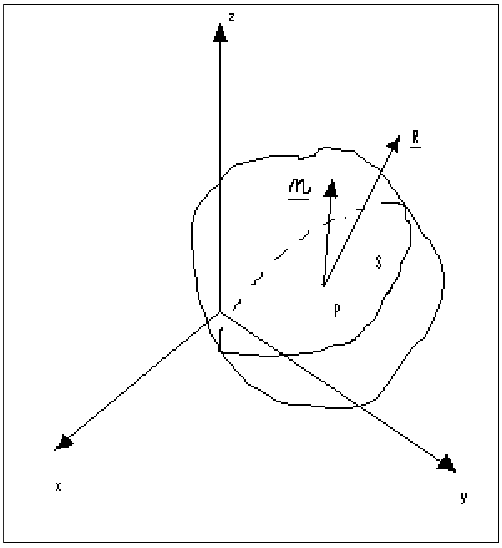

Figura 1

Sia assegnato il continuo in Figura 1 e si consideri un punto interno P di tale continuo. Si sezioni il continuo mediante un piano P passante per tale punto. Se il continuo è in condizioni di equilibrio, la risultante di tutte le forze applicate ad esso deve essere nulla. In conseguenza di ciò, la risultante delle azioni scambiate da una parte del continuo sull'altra deve essere uguale ed opposta. Sia **R** tale risultante. Tale forza sarà applicata su di un'area S corrispondente alla sezione del continuo definita dal piano P.
Considerata la normale a P per P, in base al Cauchy esiste ed è univocamente determinato il limite:

(10) $$\lim_{S \to 0} \frac{\mathbf{R}}{S} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$$

Tale limite rappresenta la t*ensione nel punto P secondo la giacitura orientata* **n**. Da come è definita la tensione varia puntualmente e secondo la direzione scelta. Risulta particolarmente comodo rappresentare le tensioni mediante la notazione tensoriale: essa, infatti, consente di svincolarsi dal riferimento scelto.

Definito il un tensore degli sforzi σ_{ij}, la tensione in un generico punto secondo la generica direzione **n** di componenti (n_1, n_2, n_3) è data da:

(11) $$\tau_{ij} = \sigma_{ij} n_j$$

Considerati il teorema della divergenza, la definizione data di tensione e l'arbitrarietà dei volumi di integrazione, la (7) può essere tradotta nella forma:

(12) $$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \mathrm{div}(\mathbf{T})$$

In un riferimento ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$) le componenti degli sforzi agenti in un fluido sono nove e raggruppate nel tensore:

(13) $$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Da un punto di vista fluidodinamico, il tensore degli sforzi rappresenta la forza per unità di area esercitata dalla parte di fluido verso cui è diretta la normale **n**. Il tensore degli sforzi è simmetrico ed è dotato degli invarianti caratteristici dei tensori lineari del secondo ordine. σ_{ij} può essere decomposto in somma di due tensori, corrispondenti uno alla componente isotropa e l'altro a quella deviatorica della deformazione. Per quanto concerne la componente isotropa, dato che $\sigma_{11}= \sigma_{22}= \sigma_{33}$, essa individua anche lo stato di sforzo di tipo idrostatico dovuto ad una pressione σ_{ii}=-p applicata sul corpo. Il segno negativo deriva dal fatto che la pressione ha verso discorde rispetto a quello della normale uscente dalla superficie di contorno dell'elemento di volume considerato. Il tensore delle pressioni ha l'espressione:

(14) $$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Nella precedente relazione Π_{ij} rappresenta il *tensore delle pressioni*, lo scalare p il valore della pressione espressa in Pa mentre δ_{ij} è il simbolo di Kronecher. La componente deviatorica del tensore σ_{ij} ha espressione:

(15) $$(\sigma_D)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Il tensore σ_{ij} avrà, quindi, espressione:

16() $$\sigma_{ij} = \Pi_{ij} + (\sigma_D)_{ij}$$

mentre Π_{ij} avrà forma:

(17) $$\Pi_{ij} = -\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Considerata la traccia del tensore (17), viene definita pressione la quantità:

(18) $$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Alla luce di queste definizioni è possibile riscrivere la (7) in termini tensoriali:

(19) $$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f}\, dV + \int_{S(t)} \mathrm{div}\mathbf{T}_{ij}^{T} dS$$

Si fa notare che**,** stante la simmetria di T_{ij}, risulta $T_{ij}=T_{ij}^{T}$. L'operazione di trasposizione della matrice si è resa necessaria per il prodotto scalare che compare nell'ultimo integrale della (4).
Si osservi come la divergenza trasformi un vettore in uno scalare ed un tensore in un vettore.

Prodotti diadici
Considerati due vettori **u**(u_1, u_2, u_3) e **v**(v_1, v_2, v_3) si consideri la matrice:

(20)
$$\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_1v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$$

Gli elementi di tale matrice sono dei prodotti scalari delle componenti dei due vettori. Tali prodotti prendono il nome di diade, e sono indicati in forma generica come $d_{mn} = u_m v_n$.
La diade è quindi un tensore, e sarà utile in seguito per definire i tensori impiegati nelle equazioni di Navier Stokes.

Operatore gradiente
Dato un riferimento generico, si definisce gradiente l'operatore:

$$\overline{\nabla}(\bullet) = \text{grad}(\bullet) = \underline{i_k}\,\frac{\partial}{\partial x_k}$$

ove si è fatto uso della convenzione di Einstein, o del falso monomio. Assegnata una funzione scalare F, risulta:

(21)
$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\underline{i_k}$$

ovvero, il gradiente di uno scalare definisce un campo vettoriale. Considerato ora un vettore **v**:

(22)
$$\mathbf{v} = v_m \underline{i_m}$$

il suo gradiente, per definizione, sarà la quantità:

(23)
$$\text{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k}\underline{i_k}$$

ossia, considerata la (22):

(24)
$$\text{grad}\,\mathbf{v} = \frac{\partial\left(v_m \underline{i_m}\right)}{\partial x_k}\underline{i_k}$$

La (24), in base alla definizione di prodotto diadico, può essere scritta nella forma:

(25)
$$\text{grad}\,\mathbf{v} = \frac{\partial\, v_m}{\partial x_k}\underline{i_k}\,\underline{i_m}$$

La (25) mostra che il gradiente di un campo vettoriale è un campo tensoriale, in misura analoga in cui il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale. Una volta definito questo, è possibile enunciare la fondamentale legge di Stokes.

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Dall'equazione (15) è nota la forma del tensore degli sforzi. Esso è una conseguenza dell'attrito, ossia della resistenza opposta da un elemento di fluido alla deformazione provocata da una qualche causa esterna. Tale resistenza è causata da una proprietà interna del fluido detta attrito interno. Considerato il tensore del secondo ordine grad**u**, esso può essere decomposto in di un tensore simmetrico D_{ij} ed uno antisimmetrico W_{ij}:

(26)
$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\text{grad}\bar{u} + \left(\text{grad}\bar{u}\right)^T\right]$$

(27)
$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left[\text{grad}\bar{u} - \left(\text{grad}\bar{u}\right)^T\right]$$

cosicchè il gradiente di velocità può essere scritto come:

(28) $$\mathrm{grad}\bar{u} = D_{ij} + W_{ij}$$

Ricordando la definizione precedentemente data di gradiente di velocità, i tensori D_{ij} e W_{ij} in un dato riferimento avranno espressione:

(29) $$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

(30) $$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Considerati i quattro postulati di Stokes:

1 - σ_{ij} funzione continua di D_{ij} ed è indipendente dalle altre variabili cinematiche;
2 - il tensore σ_{ij} è simmetrico;
3 - la forma σ_{ij} gode della proprietà di invarianza galileiana;
4 - per fluidi non viscosi $\sigma_{ij} = 0$ e $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

e considerato (se ne omette la dimostrazione) inoltre che σ_{ij} è funzione lineare del solo tensore D_{ij}, definito un tensore del quarto ordine $B_{\mathbf{ikjh}}$ che crea un legame fra σ_{ij} e D_{ij} è possibile scrivere:

(31) $$\sigma_{ij} = B_{ijkl} D_{kl}$$

Introdotte le *costanti di Lamé* μ e λ, è possibile dimostrare che σ_{ij} ha espressione tensoriale:

(32) $$\sigma_{ij} = \lambda(\mathrm{div}\,\mathbf{u})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

e di conseguenza il tensore degli sforzi assume forma:

(33) $$T_{ij} = -pI + \lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})I + 2\mu D_{ij}$$

Si fa presente che le costanti di Lamé sono degli invarianti scalari e sono funzione delle variabili di stato. In base al postulato di Stokes, risulta:

(34) $$2\mu + 3\lambda = 0$$

Tali costanti sono piuttosto scomode da determinare, per cui si definisce il coefficiente di viscosità medio come segue:

(35) $$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Usando l'espressione di σ_{ij} ottenuta nella (12) con la (15) all'interno della (11) si ottiene l'equazione di Navier-Stokes in forma tensoriale, che governa il moto dei fluidi:

(36) $$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \mathrm{grad}(p) + \mathrm{div}(\sigma_{ij})$$

Considerata la definizione di derivata sostanziale, è possibile porre la (36) anche nella forma:

(37) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{uu}) = \rho\mathbf{f} - \mathrm{grad}(p) + \mathrm{div}(\sigma_{ij})$$

L’equazione (37), essendo un’espressione tensoriale, ha validità in un qualunque sistema di riferimento. Si preferisce lasciarla in tale forma in quanto essa è suscettibile di molte manipolazioni. La si può porre, ad esempio, in coordinate cilindriche nel caso in cui si vogliano analizzare flussi assialsimmetrici. La si può riscrivere in coordinate cartesiane, oppure in coordinate curvilinee per analizzare problemi di fluidodinamica con la massima generalità.
Usualmente la (37) viene scritta con l’equazione di continuità, di conseguenza in un riferimento generico (curvilineo o ortogonale) si ottengono 3 equazioni proiettate lungo gli assi più quella di continuità. É ad esse che ci si riferisce, di solito, quando si parla di equazioni di Navier-Stokes. Nel caso in cui si abbia a che fare con flussi comprimibili e/o multifase vanno necessariamente accoppiate ad essa le equazioni della termodinamica e della cinetica chimica.

Soluzione delle equazioni di Navier-Stokes
La risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, a parte casi semplicissimi, non è effettuabile mediante integrazione diretta a causa della non linearità dei termini che compaiono in esse. Per questo motivo si è sviluppata un settore della fluidodinamica detta *Fluidodinamica Computazionale* o anche CFD (*Computational Fluid Dynamics*) il cui obiettivo è quello di risolvere tali equazioni per via numerica. I metodi numerici più comunemente utilizzati sono:

- *Metodo delle Differenze Finite (FDM);*
- *Metodo dei Volumi Finiti (FVM);*
- *Metodo degli Elementi Finiti (FEM).*

Il Metodo dei Volumi Finiti rappresenta la procedura numerica di calcolo più frequentemente adottata nella pratica, anche se non mancano esempi di applicazioni in cui si sia fatto ricorso agli elementi finiti. La CFD rappresenta un vastissimo argomento che esula lo scopo del presente articolo. Le equazioni di Navier-Stokes mediate secondo Reynolds, dette *equazioni RANS* (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) costituiscono la base dello studio della turbolenza, oggetto ancor oggi di ricerca da parte di numerosissimi studiosi nel mondo.