

STRATO LIMITE E SEPARAZIONE DELLA CORRENTE

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INTRODUZIONE

Le equazioni di Navier-Stokes costituiscono il cardine della fluidodinamica: la loro soluzione consente di determinare completamente la natura del flusso attorno ad un corpo. Il problema associato alle equazioni di Navier-Stokes è insito nella loro natura: essendo altamente non lineari la soluzione classica, ossia integrazione non numerica (carta e penna!), è di fatto impossibile tranne che per casi banali e di utilità pratica pressochè nulla.

Nel 1904 Ludwig Prandtl, fra i padri fondatori della moderna fluidodinamica, intuì che la maggior parte delle interazioni fluido-struttura si generano in uno strato, da lui chiamato *strato limite*, il cui spessore è piccolo rispetto alle dimensioni del corpo in esame. All'esterno dello strato limite la soluzione del campo di moto è ottenibile mediante le equazioni dei flussi potenziali, di natura estremamente più semplice di quelle di Navier-Stokes. La soluzione delle equazioni dello strato limite è decisamente più semplice rispetto a quelle di Navier-Stokes.

Per iniziare la trattazione analitica, si definiscono *asintotiche* tutte quelle grandezze misurate a grande distanza dal corpo in esame, in maniera tale che i loro valori non siano influenzati dalla presenza del corpo stesso. Si consideri un corpo avente superficie regolare, ossia privo di cuspidi (soprattutto se normali alla velocità asintotica del flusso), e sia fissato un riferimento Cartesiano. Siano $\mathbf{v}(u,v,w)$ il vettore velocità del flusso, ρ la densità del fluido. Si assume valido il postulato di Stokes, ossia la condizione di aderenza del fluido nelle immediate vicinanze di un corpo. Ciò significa ammettere che la velocità tangenziale al corpo si annulla a contatto della parete. Quella normale è nulla per la impenetrabilità del corpo stesso. L'equazione di continuità ha l'espressione:

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

essendo D/Dt la *derivata sostanziale*. L'equazione di conservazione della quantità di moto proiettata sui tre assi di un riferimento cartesiano ha forma:

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= (\rho g)_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= (\rho g)_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= (\rho g)_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{aligned}$$

essendo $(\rho g)_i$ la componente della forza gravitazionale lungo i tre assi. Si tenga presente che gli assi del riferimento Cartesiano non sono necessariamente allineati col campo gravitazionale.

ORDINI DI GRANDEZZA DELLE QUANTITÀ FISICHE

Per giungere alla formulazione matematica dello strato limite, Prandtl eseguì uno studio sugli ordini di grandezza delle quantità che compaiono nelle equazioni (2) rispetto allo spessore dell'ipotizzato strato limite. Per brevità sarà considerato il caso bidimensionale. Si definisce δ lo spessore dello strato limite. Sia L una lunghezza caratteristica del corpo in esame. Viene definito δ' lo spessore adimensionalizzato dello strato limite come:

$$(3) \quad \delta' = \frac{\delta}{L}$$

Normalmente δ' è dell'ordine di 10^{-2} . Per avere una idea dello spessore dello strato limite, si tenga presente che lo spessore dello strato limite per un aereo come il BOEING 747 (lungo 70 metri) è dell'ordine dei cm. Vengono altresì introdotte le seguenti quantità adimensionalizzate:

$$(4) \quad \begin{aligned} u' &= \frac{u}{V^*} & v' &= \frac{v}{V^*} & x' &= \frac{x}{L} & t' &= \frac{tV^*}{L} \\ p' &= \frac{p}{\rho^* V^{*2}} & Re &= \frac{V^* L}{\nu^*} & y' &= \frac{y}{L} & M^* &= \frac{V^*}{a^*} \end{aligned}$$

Nelle formule precedenti le grandezze asteriscate sono da intendersi asintotiche. Sostituendo le relazioni (4) nelle (2), e trascurando i termini gravitazionali, si ottiene:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{Du'}{Dt'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u' \\ \frac{Dv'}{Dt'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v' \end{aligned}$$

Prandtl, con notevole acume fisico, postulò che u' e le sue derivate ennesime sia temporali che rispetto ad x avessero al massimo ordine di grandezza pari a 1. Ciò viene denotato con $O(1)$, e si legge “ordine di uno”. Questo postulato ammette implicitamente che *le equazioni dello strato limite sono applicabili nei limiti in cui u e le sue derivate sono $O(1)$* . Gli ordini di grandezza, dal più piccolo al più grande, sono ordinati come segue:

$$(6) \quad \delta'^2 < \delta' < 1 < \frac{1}{\delta'} < \frac{1}{\delta'^2}$$

Si supponga adesso che le variazioni di densità abbiano effetti trascurabili. Questo equivale ad affermare che la derivata sostanziale che compare nel lato sinistro della (1) è trascurabile rispetto ai termini della divergenza. In conseguenza di ciò l'equazione di continuità assume forma:

$$(7) \quad \text{div} \mathbf{w}' = 0$$

Dalla (7) si ottiene:

$$(8) \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial y'} = O(1)$$

di conseguenza integrando fra 0 e δ' , ossia lungo lo spessore adimensionalizzato dello strato limite, si ottiene:

$$(9) \quad v' = \int_0^{\delta'} \frac{\partial v'}{\partial y'} dy' \approx \int_0^{\delta'} O(1) dy' = O(\delta')$$

È da notare che differenziando rispetto ad x o al tempo l'ordine di grandezza si mantiene costante, viceversa differenziando rispetto a y esso, considerate la (6) e la (9), aumenta. Eseguendo i calcoli relativi agli ordini di grandezza per le varie entità e le loro derivate, si perviene alle seguenti relazioni:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial y'} &= O\left(\frac{1}{\delta'}\right) & \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} &= O\left(\frac{1}{\delta'^2}\right) \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} &= O(\delta') & \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} &= O(\delta') \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} &= O(\delta') & \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} &= O\left(\frac{1}{\delta'}\right) \end{aligned}$$

Nella validità dell'ipotesi fatta, ossia corpi di forme non troppo tozze, le variazioni di velocità causate dal corpo saranno piccole, ossia è lecito ritenere:

$$(11) \quad v' \ll u'$$

Considerata l'entità delle derivate temporali e lungo x della velocità u' , e considerata l'equazione di Eulero, ossia la (2) priva dei termini relativi all'attrito, si ottiene:

$$(12) \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} \approx u'_e \frac{du'_e}{dx'} = O(1)$$

In questo modo si è ottenuta una valutazione dell'ordine di grandezza della derivata della pressione. Nella (12) il termine u'_e rappresenta la velocità sulla parte esterna dello strato limite. Dall'analisi complessiva sugli ordini di grandezza delle quantità che compaiono all'interno della (2) si ottiene una valutazione sull'ordine di grandezza di dp'/dy' :

$$(13) \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} = O(\delta')$$

La (13) è una deduzione estremamente importante tratta dalla teoria di Prandtl: la variazione di pressione lungo lo strato limite è essenzialmente trascurabile. Una volta analizzata l'entità degli ordini di grandezza dei termini coinvolti nelle precedenti equazioni è possibile passare alla analisi dello strato limite.

EQUAZIONI DI MOTO DELLO STRATO LIMITE

Si considerino le equazioni (2) riferite al caso bidimensionale in cui si siano trascurati i termini relativi alle forze gravitazionali:

$$(14) \quad \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Inserendo nelle (14) le espressioni delle grandezze adimensionalizzate, sviluppando le derivate sostanziali ed eseguendo lo studio degli ordini di grandezza si perviene a:

$$(15) \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$(16) \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

Dalle equazioni (15) e (16) possono evincersi gli ordini di grandezza globali dei vari termini. Per esempio il termine $v'dv'/dx'$ che compare nella (15) è $O(1)$ e così via. Il numero di Reynolds è $O(1/\delta'^2)$. La derivata della pressione rispetto a y' è $O(\delta')$. Dalla relazione d'ordine stabilita in (6), considerate la (15), la (16) e la definizione data di ordine di grandezza del numero di Reynolds si perviene all'equazione dello strato limite:

$$(17) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE

È stato dimostrato che nello strato limite il gradiente di pressione lungo l'asse y è pressochè nullo. Diverso è il caso del gradiente di pressione lungo l'asse x. Lo strato limite risulta essere molto influenzato da tale gradiente. Imponendo la condizione di aderenza sulla superficie del corpo, l'equazione di moto dello strato limite, essendo $u=v=0$ se $y=0$ (Figura 1), si riduce a:

$$(18) \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Si consideri una lastra piana.

Le speculazioni fatte su di essa sono applicabili, con le opportune differenze derivanti dalla geometria, a corpi di forme affusolate generiche.

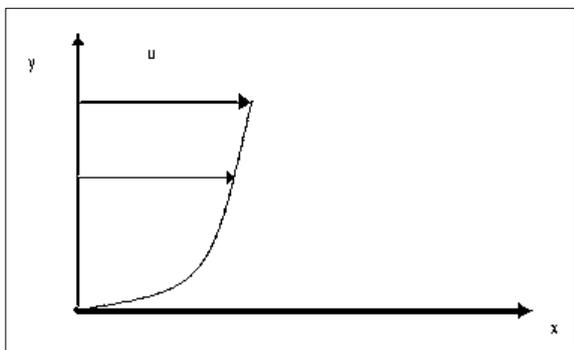


Figura 1

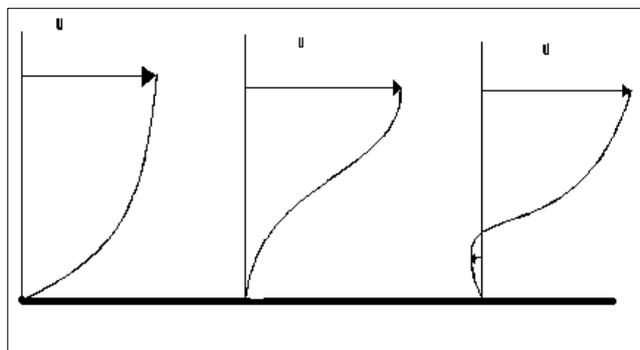


Figura 2

Nella (18) possono verificarsi tre casi.

- A - il termine al secondo membro è nullo;
- B - il termine al secondo membro è negativo;
- C - il termine al secondo membro è positivo.

Le condizioni al contorno da applicare all'equazione (18) sono le seguenti:

$$(19) \quad \begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = 0 \\ y = \delta &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad u = u_e \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno mettono in evidenza il fatto che il punto $y=0$ e $y=\delta$ sono punti di flesso per la curva di distribuzione della velocità lungo y all'interno dello strato limite (Figura 2).

Il caso A si verifica, ovviamente, sulla superficie, ma si verifica anche su di una superficie piatta allineata col flusso. Si vedrà più avanti che può verificarsi anche in un punto intermedio dello strato limite di una superficie non piana.

Nel caso B si ha che se il gradiente di pressione lungo x è negativo, allora sarà negativa la derivata seconda di u . Ciò implica che la derivata prima di u sia decrescente con y :

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Downarrow \Rightarrow y \Downarrow$$

È però vera la condizione al contorno imposta dalle (19):

$$(21) \quad y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad u = u_e$$

di conseguenza il profilo della distribuzione di velocità nello strato limite parte e termina con la stessa tangente.

Nel caso C la pendenza puntuale della tangente alla curva che descrive il profilo di velocità è crescente con y . Le condizioni al contorno impongono, però, che sia nulla la derivata di u a $y=0$ e $y=\delta$, ragion per cui da qualche parte nello strato limite ci deve essere un flesso. L'esistenza di tale flesso denuncia l'avvenuto distacco dello strato limite (Figura 3). In corrispondenza del distacco si ha una inversione del flusso del fluido attorno al corpo con conseguente generazione di turbolenza ed ispessimento dello strato limite stesso. È questo un fenomeno da tenere ben presente per vari motivi. Nel momento in cui si verifica il distacco dello strato limite si ha formazione di turbolenza, e ciò provoca vibrazioni (con associato rumore). Aumenta inoltre la resistenza indotta. La turbolenza, inoltre, rende fluttuante la portanza che si sviluppa attorno ad un corpo.

Per un aereo potrebbe significare stallo incontrollabile. Il distacco dello strato limite è un problema molto delicato nella progettazione degli aerei. Per evitare che si verifichi durante le manovre di decollo e atterraggio si ricorre a stratagemmi atti a 'riportare' lo strato limite in condizioni normali, o almeno ad evitare l'inversione del flusso. Talvolta si accetta l'esistenza di uno strato limite separato, specie su aerei militari.

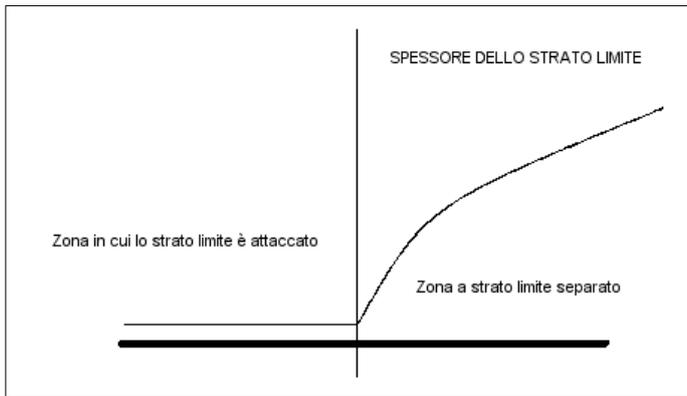


Figura 3

In questi casi il calcolo in condizioni separate non è più effettuabile con le equazioni qui presentate e bisogna necessariamente ricorrere alla CFD adottando solutori di Navier Stokes in cui si sia implementato un modello di turbolenza adeguato alla descrizione del fenomeno fisico in esame.

In alcuni aerei, come il Mc Donnell Douglas MD80 (il bireattore da trasporto passeggeri comunemente usato dall'Alitalia nelle tratte nazionali), o il Lockheed C5 Galaxy, o il Lockheed F104 Starfighter (adottato dalla nostra Aeronautica Militare) si pongono i piani di coda (gli stabilizzatori, cioè le piccole ali orizzontali normalmente sulla coda degli aerei) in alto sul timone.

In questo modo si riduce la probabilità che in caso di ispessimento dello strato limite i piani di coda -strumento fondamentale per il controllo del beccheggio, delle cabrate e delle picchiate- possano finire nella zona di flusso turbolento causata da tale fenomeno.

Un'altra possibilità è quella di porre gli stabilizzatori un po' più in basso rispetto alla orizzontale passante per le ali: l'ispessimento dello strato limite interessa, infatti, la parte superiore dell'ala (estradosso) a meno di condizioni di volo rovesciato!

Lo studio dello strato limite comprende anche gli effetti della compressibilità del flusso, aspetto qui omesso. Lo studio degli strati limite tridimensionali è ben più complesso di quelli bidimensionali, e mette in luce altri fenomeni assolutamente imprevedibili da un punto di vista bidimensionale.