

REOLOGIA DEI FLUIDI NEWTONIANI

Valerio D'ALESSANDRO *

* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in "Energetica"; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

EQUAZIONI DELLA DINAMICA DEI CONTINUI DEFORMABILI

L'evoluzione storica dello studio dei fenomeni fisici ha permesso, fra i tanti problemi risolti, lo studio e la soluzione del problema dinamico e termico di un qualsiasi corpo deformabile, ipotizzato continuo, che può essere affrontato con un set di equazioni, corredate di opportune condizioni al contorno ed iniziali, fornite dai principi fisici prima citati, unitamente ad un opportuno modello termodinamico del corpo in esame. L'analisi della dinamica dei continui deformabili tradizionalmente si basa su un modello matematico di fluido rispondente alle caratteristiche di seguito esposte.

Fluido continuo

È necessario trascurare la natura discontinua della materia al fine di poter applicare l'Analisi Matematica, cioè: deve essere possibile far tendere a zero un volume di fluido senza che questo resti privo dello stesso. La possibilità di trascurare la discontinuità della materia è condizionata dal *Numero di Knudsen*:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

dove λ è il libero cammino medio delle molecole del fluido ed L è la lunghezza caratteristica del problema in esame. Generalmente l'ipotesi di continuo è accettata nel campo $Kn < 0,01$.

Tale condizione è soddisfatta nella stragrande maggioranza delle applicazioni; un esempio di regime di moto ad alti numeri di Knudsen è costituito dal rientro in atmosfera delle navette spaziali.

Fluido chimicamente omogeneo ed inerte

Fluido privo di cariche elettriche - Lo studio del moto di fluidi elettromagneticamente sensibili e l'interazione di questi con campi elettromagnetici, infatti, costituisce l'oggetto dello studio della Magnetofluidodinamica (MHD);

Il principio di conservazione della massa, la seconda legge di Newton ed il *Primo Principio della Termodinamica* per i continui deformabili assumono la forma (si presuppone noto il significato dei simboli delle grandezze che vi compaiono):

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$(2) \quad \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \rho \mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$$

$$(3) \quad \rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_e + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T : \nabla \mathbf{u}$$

Dall'osservazione delle (1), (2) e (3) si nota molto facilmente che non si è affatto raggiunta la chiusura del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali ed un passaggio molto delicato nel raggiungimento dell'obiettivo appena citato è quello di stabilire il comportamento reologico del fluido.

La classe di relazioni che determinano il comportamento reologico di un continuo deformabile, come noto, sono dette *equazioni costitutive* le quali sono generate a partire dai tre *postulati di Noll*:

PRINCIPIO DI DETERMINISMO: la tensione di un corpo è determinata dalla storia del moto che il corpo ha avuto fino al tempo t , e non è quindi influenzata dal moto futuro del corpo;

PRINCIPIO DI EFFETTO LOCALE: il moto del fluido al di fuori di un intorno abbastanza piccolo di una particella materiale P , può essere ignorato nel determinare la tensione in quel punto. Cioè il moto di una parte del corpo non ha effetto sulla tensione in un'altra parte del corpo stesso;

PRINCIPIO DI INVARIANZA RISPETTO A VARIAZIONI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO: le equazioni costitutive devono risultare invarianti per cambiamenti del sistema di riferimento e quindi dell'osservatore.

Si può soddisfare il principio di determinismo assumendo che il tensore degli sforzi dipenda solo dallo stato attuale del moto del fluido.

Il principio di effetto locale, invece, può essere soddisfatto se si assume che le componenti del tensore in un punto dipendano solo dalla velocità locale e dal tensore gradiente delle velocità nel medesimo punto, oltre che dai valori locali delle variabili di stato termodinamiche (S.T.). I primi due postulati di Noll portano a scrivere:

$$T_{ij} = H\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, S.T.\right)$$

Come noto il tensore gradiente delle velocità locali può essere scomposto nella sua parte simmetrica di velocità di deformazione ed in una parte antisimmetrica di velocità di rotazione di corpo rigido:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dot{E}_{ij} + \Omega_{ij}$$

Il terzo postulato di Noll impone che le componenti del tensore degli sforzi possano dipendere solamente dal tensore delle velocità di deformazione. Se consideriamo infatti un primo osservatore in un sistema di riferimento fisso con il laboratorio ed un secondo osservatore in un sistema di riferimento che trasla e ruota insieme al fluido: rispetto a questo sistema di riferimento, il fluido ha $u=0$ e $\Omega_{ij}=0$, il secondo non è nelle medesime condizioni. Dovendo però essere il comportamento del materiale lo stesso per ambedue gli osservatori si deduce che:

$$(4) \quad T_{ij} = H(\dot{E}_{ij}, S.T.)$$

Importanti proprietà strutturali del tensore degli sforzi possono essere ricavate a partire dall'equazione differenziale del momento della quantità di moto intrinseco che verrà ricavata nel seguito, mentre importanti vincoli alle relazioni di tipo (4) sono poste dalla termodinamica, in particolare dal postulato di produzione entropica il quale verrà anch'esso discusso nel seguito.

EQUAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Il momento della quantità di moto per unità di massa I della particella materiale P rispetto all'origine O del sistema di riferimento inerziale adottato è così definito:

$$I = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{u} + \mathbf{M}_i$$

dove il primo contributo è detto momento della quantità di moto estrinseco ed il secondo momento della quantità di moto intrinseco. Il bilancio logico del *momento della quantità di moto* è il seguente:

$$(5) \quad \frac{DI}{Dt} = \Phi_I + P_I$$

cioè la variazione locale di momento della quantità di moto deve eguagliare il flusso diffuso della medesima più la sua produzione.

Il *flusso diffusivo del momento della quantità di moto* è:

$$(6) \quad \Phi_I = \int_{\partial\Omega} (\overrightarrow{OP} \times \mathbf{t}_n(P,t) + \mathbf{c}_n(P,t)) dS$$

dove $\mathbf{t}_n(P,t)$ e $\mathbf{c}_n(P,t)$ e sono rispettivamente la forza per unità di superficie e la coppia per unità di superficie a cui si può ridurre il sistema di sforzi superficiali agente sull'elemento di superficie dS dovuto alla porzione di continuo posto dalla parte positiva della normale uscente alla superficie elementare. Ci si riferisce a $\mathbf{t}_n(P,t)$ e $\mathbf{c}_n(P,t)$ definendoli rispettivamente: *vettore tensione* e *vettore delle tensioni coppie*. Tramite le classiche considerazioni basate sul tetraedro di Cauchy si può mostrare che:

$$(7) \quad \mathbf{t}_n(P,t) = \underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{n}$$

$$(8) \quad \mathbf{c}_n(P,t) = \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{n}$$

dove $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ è il *tensore delle tensioni coppie* e $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ è il noto *tensore degli sforzi* . Applicando alla (5) il teorema di Leibniz, la definizione di flusso diffusivo in cui introduciamo le (7) e le (8) e tenendo conto che il momento della quantità di moto può essere prodotto dalle sole forze di massa, si ha:

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \rho I d\Omega \right) + \oint_{\partial\Omega} \rho I (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\overline{\mathbf{OP}} \times \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) dS + \int_{\Omega} \overline{\mathbf{OP}} \times \rho \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) d\Omega$$

La (9) si può ridurre facilmente alla sua forma differenziale applicando agli integrali di superficie il teorema di Gauss-Green. Tenendo presente che un integrale identicamente nullo esteso ad un dominio di integrazione regolare può essere tale se e solo se il campo vettoriale/scalare integrando è identicamente nullo, si ottiene:

$$(10) \quad \rho \frac{DI}{Dt} = \nabla \cdot (\overline{\mathbf{OP}} \times \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) + \overline{\mathbf{OP}} \times \rho \mathbf{G}$$

A partire dalla definizione di momento della quantità di moto estrinseco è possibile ricavarne l'equazione differenziale di trasporto-diffusione. Infatti:

$$(11) \quad \rho \frac{D}{Dt} (\overline{\mathbf{OP}} \times \mathbf{u}) = \overline{\mathbf{OP}} \times \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

e sostituendo la (2) in (9) si ha:

$$(12) \quad \rho \frac{D}{Dt} (\overline{\mathbf{OP}} \times \mathbf{u}) = \overline{\mathbf{OP}} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}) + \overline{\mathbf{OP}} \times \rho \mathbf{G}$$

che è quanto si cercava. Sottraendo la (12) alla (10) si ottiene l' *equazione differenziale del momento della quantità di moto intrinseco* :

$$(13) \quad \rho \frac{D\mathbf{M}_i}{Dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \mathbf{T}_v$$

dove \mathbf{T}_v è il vettore del tensore degli sforzi. L'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{T}}} \times \overline{\mathbf{OP}}) = (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}) \times \overline{\mathbf{OP}} - \mathbf{T}_v$$

oltre a permettere di passare tramite (10) da (12) ad (13) permette una risistemazione della (12) stessa:

$$(14) \quad \rho \frac{D}{Dt} (\overline{\mathbf{OP}} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}) \times \overline{\mathbf{OP}} = \overline{\mathbf{OP}} \times \rho \mathbf{G} - \mathbf{T}_v$$

PRODUZIONE DI ENTROPIA NEI CONTINUI DEFORMABILI

L'ipotesi di equilibrio evolutivo ci permette di scrivere:

$$(15) \quad T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt}$$

Tendendo presente che l'equazione di trasporto-diffusione dell'entropia in un continuo deformabile assume la forma:

$$(16) \quad \rho \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \rho \dot{s}$$

mentre a partire dall'equazione di continuità e tenendo presente la relazione che intercorre fra densità e volume specifico si può scrivere:

$$(17) \quad \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Sostituendo in (15) le relazioni (3), (16) e (17) si ha:

$$(18) \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{J}_e + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho T \dot{s} - \nabla \cdot (\mathbf{T} \mathbf{J}_s) + \mathbf{J}_s \cdot \nabla T$$

L'ipotesi dell'equilibrio evolutivo permette di mettere in relazione il flusso diffusivo di entropia e di energia interna come segue:

$$(19) \quad \mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{J}_e}{T}$$

Sostituendo la (19) in (18) e riordinando si ha:

$$(20) \quad \rho T \dot{s} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T : \nabla \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

FLUIDI NEWTONIANI

La determinazione delle relazioni di tipo (4) per i vari materiali esistenti costituisce un campo di ricerca molto complesso; in questo paragrafo, però, ci si pone l'obiettivo di arrivare ad una relazione di tipo (4) per una classe di fluidi che è detta dei *Fluidi Newtoniani* la quale è fortemente rappresentativa del comportamento di acqua ed aria. La (13) è madre di una importante proprietà strutturale del tensore degli sforzi; infatti nelle ipotesi di:

- assenza di momento della quantità di moto intrinseco;
- assenza delle tensioni coppia;

si ha: $\mathbf{T}_v = 0$

per cui dalla definizione di vettore del tensore degli sforzi: $\mathbf{T}_v = \sum_i \mathbf{e}_i (T_{jk} - T_{kj})$

risulta che deve essere $T_{jk} = T_{kj}$. Le due ipotesi sopra poste implicano la simmetria del tensore degli sforzi:

$$(21) \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$$

I fluidi che possiedono momento della quantità di moto intrinseco e che hanno il tensore delle tensioni coppia identicamente non nulli sono detti *fluidi micropolari*. Per la soluzione del problema fluidodinamico di questi fluidi è necessario affiancare alle tradizionali equazioni di continuità, quantità di moto e dell'energia anche l'equazione del momento della quantità di moto. Per i fluidi non micropolari si può verificare che sia l'equazione del momento della quantità di moto intrinseco che estrinseco sono identicamente soddisfatte. La (21) trasforma la (20) nel seguente modo:

$$\rho T \dot{s} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} : \nabla \mathbf{u}^{(s)} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

Scomponendo il tensore degli sforzi ed il tensore gradiente delle velocità nella loro parte sferica e deviatorica si ha:

$$\rho T \dot{s} = \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}_0}} \right) : \left(\nabla \mathbf{u}_0^{(s)} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

Applicando ora la proprietà distributiva della somma algebrica rispetto al doppio prodotto scalare si ottiene:

$$\rho T \dot{s} = \underline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} : \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} + \frac{\pi}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} : \underline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}_0}} : \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} + \left(\frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \underline{\underline{\mathbf{T}_0}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

ovvero:

$$(22) \quad \rho T \dot{s} = (\pi + p) \nabla \cdot \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{T}_0}} : \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} - \mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

Il significato della (22) è molto profondo, infatti se ne deduce che:

- l'atto di moto rigido non contribuisce alla produzione di entropia;
- la variazione di volume del fluido significa produzione di entropia se lo sforzo normale medio è diverso dalla pressione termodinamica;
- la parte deviatorica del tensore degli sforzi è responsabile della velocità di variazione di forma del fluido e contribuisce alla produzione entropica;
- il flusso diffusivo di energia interna contribuisce alla produzione entropica.

Il tensore degli sforzi quindi può essere riscritto come segue:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \left[(\pi + p) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_0 \right]$$

dove il primo addendo è la parte reversibile del tensore degli sforzi mentre il secondo addendo è la parte dissipativa dello stesso.

Dal postulato di produzione dell'entropia per $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_0$, $\pi + p$ e \mathbf{J}_e deve essere necessariamente:

$$(23) \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_0 : \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} \geq 0$$

$$(24) \quad (\pi + p) \nabla \cdot \mathbf{u} \geq 0$$

$$(25) \quad -\mathbf{J}_e \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0$$

La (23) e la (24) rappresentano dei vincoli termodinamici a cui la parte dissipativa dei tensori degli sforzi deve sempre sottostare. La (25), invece, rappresenta un vincolo termodinamico alle relazioni costitutive per il flusso di energia interna. I fluidi non micropolari che soddisfano le seguenti relazioni lineari causa-effetto si dicono *fluidi Newtoniani*:

$$(26) \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_0 = 2\mu \nabla \mathbf{u}_0^{(s)}$$

$$(27) \quad (\pi + p) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Sostituendo (26) e (27) rispettivamente in (23) e (24) si ottiene:

$$(28) \quad 2\mu \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} : \nabla \mathbf{u}_0^{(s)} \geq 0$$

$$(29) \quad \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \geq 0$$

Per effetto del postulato di produzione dell'entropia i coefficienti μ e λ , che sono detti rispettivamente primo e secondo coefficiente di viscosità, devono essere identicamente non nulli. Sostituendo la (26) e la (27) nell'espressione del tensore degli sforzi si ottiene:

$$(30) \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \left[-p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^{(s)}$$

La (30) rappresenta l'equazione costitutiva dei fluidi newtoniani, ed in perfetto accordo con i postulati di Noll è con i vincoli posti dalla Termodinamica.