EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES E VETTORE DI VORTICITÁ

Valerio MARRA *

** Ingegnere Nucleare, Dottorato di Ricerca in “Ingegneria delle Macchine e dei Sistemi Energetici”; esperto di modellazione e simulazione multifisica*

LEGGI DI CONSERVAZIONE

Formulazione Integrale

Il moto di un mezzo continuo è governato dalle leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell’energia. In un sistema di riferimento Galileiano la formulazione integrale delle leggi di conservazione è data dal seguente di sistema di equazioni

(1) $$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\int_S \rho \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

(2) $$\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{u}\, dV + \int_S \left[(\vec{u}\cdot\vec{n})\rho\vec{u} - \vec{n}\cdot\vec{S}\right] dS = \int_V \vec{f}_e \, dV$$

(3) $$\frac{d}{dt}\int_V \rho E\, dV + \int_S \vec{n}\cdot\left[\rho E\vec{u} - \vec{S}\cdot\vec{u} + \vec{q}\right] dS = \int_V \vec{f}_e \cdot \vec{u}\, dV$$

dove t è il tempo, ρ la densità, **u** la velocità, E=e+1/2 $|\mathbf{u}|^2$ è l’energia specifica totale con e energia interna specifica, **S** è il tensore degli sforzi, **q** il vettore flusso di calore, $\mathbf{f_e}$ la forza esterna per unità di volume, e **n** il versore normale uscente dal contorno S del volume di integrazione V (sono stati qui indicati con lettere in grassetto i simboli dei vettori che nelle formulazioni analitiche sono indicati con lettere soprassegnate con una freccetta). Inoltre, in questa formulazione non sono presenti pozzi o sorgenti di massa ed energia.

Formulazione Euleriana

Le proprietà del mezzo non devono essere necessariamente una funzione continua dello spazio e del tempo, se però sono continue e sufficientemente differenziabili, allora le equazioni nella forma integrale (1), (2) e (3) possono essere trasformate in un set equivalente di equazioni alle derivate parziali usando il teorema della divergenza:

(4) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

(5) $$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\otimes\vec{u} - \vec{S}\right) = \vec{f}_e$$

(6) $$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho E\vec{u} - \vec{S}\cdot\vec{u} + \vec{q}\right) = \vec{f}_e \cdot \vec{u}$$

Si ottengono così le equazioni nella cosiddetta forma euleriana.

Formulazione Lagrangiana

Mediante alcune identità vettoriali e semplici passaggi algebrici si deriva prontamente la seguente formulazione lagrangiana:

(7) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

(8) $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} - \nabla\cdot\vec{S} = \vec{f}_e$$

(9) $$\rho \frac{De}{Dt} - \vec{S} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \cdot \vec{q} = 0$$

dove:

(10) $$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$$

è detta *derivata convettiva*.

DERIVAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Le variabili incognite nei precedenti sistemi di equazioni di conservazione sono la densità ρ, la velocità **u** e l'energia specifica E. Per ottenere un sistema chiuso devono essere aggiunte delle relazioni costitutive che legano il tensore degli sforzi **S** a **u** e il vettore flusso di calore **q** alla temperatura assoluta T. Consideriamo i fluidi Newtoniani per i quali il tensore degli sforzi è una funzione lineare del gradiente di velocità (legge di Newton)

(11) $$\vec{S} = -p\vec{I} + 2\mu\,\vec{D}$$

dove:

(12) $$\vec{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + \left(\nabla\vec{u}\right)^{T}\right]$$

è il *tensore del tasso di deformazione* (l'apice T indica il tensore trasposto), p è la pressione idrostatica, e μ la viscosità dinamica. Nella definizione di **S** per semplicità abbiamo assunto un fluido incomprimibile. Inoltre se il fluido segue la legge di conduzione del calore di Fourier, vale la relazione:

(13) $$\vec{q} = -k\nabla T$$

dove k è il coefficiente di conduttività termica. Molti fluidi, in particolare l'aria e l'acqua, seguono in molte circostanze la legge di Newton e quella di Fourier. Introducendo la legge di Newton nelle equazioni di conservazione per la massa, quantità di moto ed energia nella formulazione lagrangiana si ottiene

(14) $$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(15) $$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla p = \vec{f}_e + \mu\,\nabla^2\vec{u}$$

(16) $$\rho \frac{De}{Dt} + p\nabla \cdot \vec{u} = \mu\,\Phi - \nabla \cdot \vec{q}$$

con μ costante e la *funzione di dissipazione* Φ definita come:

(17) $$\Phi = 2\vec{D} \cdot \vec{D}$$

Le equazioni (14) e (15) sono note nella letteratura scientifica come il *sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di Navier-Stokes*.

VETTORE DI VORTICITÁ

Una formulazione alternativa delle equazioni di Navier-Stokes fa' uso del *vettore vorticità*:

(18) $$\vec{\varpi} = \nabla \times \vec{u}$$

dove per flussi bidimensionali $\boldsymbol{\varpi}=\varpi\mathbf{k}$, con **k** versore normale al piano del flusso. Riscriviamo l'equazione di conservazione della quantità di moto in forma euleriana per un fluido Newtoniano incomprimibile:

(19) $$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\vec{u}\otimes\vec{u}\right)+\frac{\nabla p}{\rho}-\nu\,\nabla^2\vec{u}=\frac{\vec{f}_e}{\rho}$$

dove $\nu=\mu/\rho$ è la viscosità cinematica. L'equazione di evoluzione per lo scalare ϖ si ottiene applicando l'operatore differenziale rotore all'equazione (19) ottenendo:

(20) $$\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\quad-\nu\nabla^2\quad=\frac{1}{\rho}\nabla\times\vec{f}_e$$

dove non compare più il gradiente di pressione. Si può dimostrare che nell'intorno di un qualsiasi punto dello spazio fisico immerso in un generico campo di velocità **u**, il moto è esprimibile al primo ordine come somma di una traslazione rigida, una deformazione che non cambia il volume, una espansione o compressione isotropa e una rotazione rigida con velocità angolare pari a $1/2\boldsymbol{\varpi}$.